PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Nous étudions des propriétés associées aux translations et aux dérivées partielles (partie I). Nous construisons une classe de fonctions (partie II). À partir d'un exemple, nous montrons que la résolution d'une équation aux dérivées partielles, posée dans le plan, peut se ramener à celle d'une équation fonctionnelle, posée dans un intervalle réel (parties III et IV). Nous établissons des estimations en fonction de la donnée (partie V).

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de nombres réels.

Soit $a = (a_1, a_2)$ un élément de $\mathbb{R}^2$, τ_a représente la translatée de vecteur a ; c'est-à-dire l'application qui à $x = (x_1, x_2)$ associe :

$$\tau_a x = a + x = (a_1 + x_1, a_2 + x_2).$$

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $k \geqslant 0$ un entier, on note $C^k(\mathcal{U})$ l'ensemble des applications de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^k.

I. PROPRIÉTÉS ASSOCIÉES AUX TRANSLATIONS, AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

1° On désigne par $a = (a_1, a_2)$ un élément donné de $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que τ_a est une bijection continue de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

b. Quelle est la bijection réciproque ?

2° Étant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, on note Ω_a le translaté de Ω par τ_a.

Montrer que Ω_a est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Étant donné une application f de Ω dans $\mathbb{R}$, on note $\tau_a f$ l'application translatée de f par τ_a ; c'est-à-dire l'application qui à $x \in \Omega_a$ associe $f(x - a) = f(x_1 - a_1, x_2 - a_2)$.

3° On suppose que $f \in C^0(\Omega)$. Montrer que $\tau_a f \in C^0(\Omega_a)$.

Les dérivées partielles par rapport à la première variable et la deuxième variable sont notées respectivement ∂_1 et ∂_2.

4° On suppose que $f \in C^1(\Omega)$. Montrer que $\tau_a f \in C^1(\Omega_a)$ et que pour $i \in \{1, 2\}$, on a : $\partial_i \tau_a f = \tau_a \partial_i f$.

5° On suppose que $f \in C^2(\Omega)$ et on lui associe la fonction $\delta_a f$ définie sur Ω_a par :

$$\delta_a f = a_1 \tau_a \partial_1 f + a_2 \tau_a \partial_2 f.$$

a. Admettre que pour $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, on a :

$$\partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g, \text{ pour } g \in C^2.$$

Montrer que pour $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, on a :

$$\partial_i \partial_j \delta_a f = \delta_a \partial_i \partial_j f.$$

b. $\delta_a f$ est-elle de classe C^2 ?

II. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE FONCTIONS.

1° On introduit l'intervalle I et l'ouvert B définis respectivement par : $I = \{t ;\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Soit φ l'application définie par : $B \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, t) \longmapsto (x_1 - \cos t, x_2 - \sin t)$.

a. Montrer que φ est de classe C^2.

b. Montrer que l'image de φ est contenue dans l'ouvert suivant : $B' = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$.

c. L'image de φ est-elle égale à B' ?

Dans toute la suite, on désigne par Ω l'ouvert : $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

2° Soit α l'application définie par : $I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$.

À toute fonction $f \in C^0(\Omega)$, on associe l'application τf de $B \times I$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\tau f(x, t) = \tau_{\alpha(t)} f(x)$.

Montrer que τf est continue sur $B \times I$.

Tournez la page S. V. P.

3° À toute fonction $f \in C^1(\Omega)$ on associe l'application δf de $B \times I$ dans R définie par : $\delta f(x, t) = \delta_{\alpha(t)} f(x)$.

a. On suppose que $(f, g) \in C^1(\Omega) \times C^1(\Omega)$.
Montrer que $\delta(f + g) = \delta f + \delta g$.

b. On suppose que $f \in C^2(\Omega)$. Montrer que pour $i \in \{1, 2\}$ on a : $\partial_i \delta f = \delta \partial_i f$.
Montrer que δf est de classe C^1.

c. On suppose que $f \in C^3(\Omega)$. Montrer que pour $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ on a : $\partial_i \partial_j \delta f = \delta \partial_i \partial_j f$.
Montrer que δf est de classe C^2.

4° Soit $w \in C^3(\Omega)$ et g une application de I dans R, continue. On note u l'application de B dans R, définie par :

$$u(x) = \int_0^{2\pi} g(t)\, \delta w(x, t)\, dt.$$

a. Montrer que pour $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ on a : $\partial_i \partial_j u(x) = \int_0^{2\pi} g(t)\, \delta \partial_i \partial_j w(x, t)\, dt$.

b. On suppose que l'on a dans Ω : $\partial_1 \partial_1 w + \partial_2 \partial_2 w = 0$.
Montrer que l'on a dans B : $\partial_1 \partial_1 u + \partial_2 \partial_2 u = 0$.

5° On note ln le logarithme népérien.
On choisit pour w la fonction définie par : $w(x) = -\ln[r(x)]$ avec : $r(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

a. Montrer que $w \in C^2(\Omega)$.

b. Pour $i \in \{1, 2\}$, exprimer $\partial_i r$ et $\partial_i \partial_i r$ en fonction de x et de r.

c. Montrer que dans Ω on a : $\partial_1 \partial_1 w + \partial_2 \partial_2 w = 0$.

II. Étude de valeurs au bord.

On désigne par w l'application définie à la question (II-5°) et par u l'application introduite à la question (II-4°).

À tout élément $x \in B \setminus \{0\}$ on associe le couple unique $(\rho, \theta) \in]0, 1[\times [0, 2\pi[$ défini par :

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\theta, \\ x_2 = \rho \sin\theta. \end{cases}$$

1° *a.* Soit $x \in B \setminus \{0\}$ et $t \in I$, calculer $\delta w(x, t)$ en fonction de ρ et $\cos(\theta - t)$. On note $K(\rho, \theta, t)$ l'expression trouvée.

b. On suppose $\theta \neq t$. Montrer que lorsque ρ tend vers 1, $K(\rho, \theta, t)$ admet une limite indépendante de θ et de t.

2° Pour tout $(\rho, \theta, t) \in]0, 1[\times [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ on pose : $N(\rho, \theta, t) = K(\rho, \theta, t) - \frac{1}{2}$.

a. Montrer que : $N(\rho, \theta, t) = \frac{1}{2} \frac{(1 - \rho^2)}{\rho^2 - 2\rho\cos(\theta - t) + 1}$. Quel est le signe de N ?

b. Calculer l'intégrale : $\int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t)\, dt$.

Est-elle dépendante de ρ et de θ ?

3° Soit $t_0 \in]0, 2\pi[$; on se propose de montrer que : $\left(\int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t)\, g(t)\, dt\right) \longrightarrow \pi g(t_0)$,
lorsque : $(\rho, \theta) \longrightarrow (1, t_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

a. Montrer que : $\int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t)\, g(t)\, dt - \pi g(t_0) = \int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t)\, [g(t) - g(t_0)]\, dt$.

Tournez la page S. V. P.

b. Montrer que l'on peut trouver $n > 0$ tel que :

$$- : n < \min(t_0, 2\pi - t_0),$$

$$- : (\forall\, t \in I)\ (|t - t_0| \leqslant n) \Rightarrow |g(t) - g(t_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

On suppose n ainsi choisi.

c. Montrer que :

$$\left| \int_{t_0 - n}^{t_0 + n} N(\rho, \theta, t)\,[g(t) - g(t_0)]\,dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

d. Montrer que pour tout $(\theta, t) \in [0, 2\pi[\times I$ on a :

$$- : \left(|\theta - t| \geqslant \frac{n}{2}\right) \Rightarrow \rho^2 - 2\rho\cos(\theta - t) + 1 \geqslant \sin^2\frac{n}{2}.$$

$$- : \left(|t - t_0| \geqslant n \text{ et } |\theta - t_0| \leqslant \frac{n}{2}\right) \Rightarrow |\theta - t| \geqslant \frac{n}{2}.$$

e. Établir que pour tout $(\rho, \theta) \in]0, 1[\times [0, 2\pi[$

$$\left(|\theta - t_0| \leqslant \frac{n}{2}\right) \Rightarrow \int_0^{t_0 - n} N(\rho, \theta, t)\,[g(t) - g(t_0)]\,dt + \int_{t_0 + n}^{2\pi} N(\rho, \theta, t)\,[g(t) - g(t_0)]\,dt \leqslant \frac{2\pi}{\sin^2\frac{n}{2}}\,\|g\|_\infty\,(1 - \rho^2),$$

où

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(t)|\,;\, t \in [0, 2\pi]\}.$$

f. Conclure.

4° Déduire de la question précédente que

$$u(x) \longrightarrow \left(\pi\, g(t_0) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt\right)$$

lorsque

$$x \longrightarrow (\cos t_0, \sin t_0).$$

IV. Résolution d'une équation fonctionnelle.

Étant donné une fonction F de $I = [0, 2\pi]$ dans R, continue ; on considère l'équation :

$$\text{(E)}\quad \pi\, g + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = F,$$

l'inconnue étant une fonction g de I dans R, continue.

1° Chercher une solution de (E) sous la forme

$$\lambda F + \mu$$

où les nombres réels λ et μ sont à déterminer.

2° Montrer que (E) admet une solution unique.

3° On choisit B comme en (II-1°). Montrer que l'on peut construire une fonction u de B dans R telle que :

① $\partial_1\partial_1 u + \partial_2\partial_2 u = 0$ dans B,

② (pour $t_0 \in]0, 2\pi[$) $u(x) \longrightarrow F(t_0)$,

lorsque $x \longrightarrow (\cos t_0, \sin t_0)$.

Tournez la page S. V. P.

V. Estimation en fonction de la donnée.

Étant donné :

— : une fonction f définie sur $I = [0, 2\pi]$ à valeurs réelles et continue.

— : un nombre réel $p > 1$; on note :

$$|f|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De même, on note :

$$|f|_\infty = \sup \{ |f(t)| ; t \in [0, 2\pi] \}.$$

Soit N l'expression introduite en (III-2°) ; on note :

$$v(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} N(\rho, \theta, t) \, g(t) \, dt.$$

1° Montrer que l'on a les estimations :

a. $|v(\rho, \theta)| \leqslant \pi |g|_\infty$.

b. $|v(\rho, \theta)| \leqslant \dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}} |g|_2$.

2° *a.* Étant donné deux nombres réels strictement positifs λ, μ tels que :

$$\lambda + \mu = 1$$

montrer que pour tout couple de nombres réels strictement positifs (a, b), on a l'inégalité

$$a^\lambda b^\mu < \lambda a + \mu b,$$

(on utilisera la convexité de la fonction : $x \longmapsto -\ln x$).

b. En déduire que pour tout couple de nombres réels strictement positifs (α, β), on a l'inégalité :

$$\alpha \beta < \lambda \alpha^{\frac{1}{\lambda}} + \mu \beta^{\frac{1}{\mu}}.$$

c. Soit p et q deux nombres réels > 1 tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

choisir dans la question précédente :

$$\lambda = \frac{1}{p}, \ \mu = \frac{1}{q}, \ \alpha = \frac{|f(t)|}{|f|_p}, \ \beta = \frac{|g(t)|}{|g|_q},$$

en déduire que :

$$\int_0^{2\pi} f(t) \, g(t) \, dt \leqslant |f|_p \, |g|_q.$$

3° Montrer que pour $q \in]1, +\infty]$ on a l'estimation :

$$|v(\rho, \theta)| \leqslant \frac{\pi^{1-\frac{1}{q}}}{(1-\rho)^{\frac{1}{q}}} |g|_q.$$

• • •
•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail